Fyzikální pole a Maxwellovy rovnice

Tomáš Miléř

26. února 2006

Obsah

1 Základní vztahy a operátory

Hamiltonův vektorový operátor nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{1}$$

Použití operátoru nabla

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi \quad = \quad \text{vektor} \tag{2}$$
$$\nabla\cdot\vec{a} = \operatorname{div}\vec{a} \quad = \quad \text{skalár} \tag{3}$$
$$\nabla\times\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{a} \quad = \quad \text{vektor} \tag{4}$$

Výpočet gradientu a jeho velikosti

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \tag{5}$$
$$|\operatorname{grad}\varphi| = \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

Divergence vektorového pole

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_{\mathrm{x}}}{\partial x} + \frac{\partial a_{\mathrm{y}}}{\partial y} + \frac{\partial a_{\mathrm{z}}}{\partial z} \tag{7}$$

Rotace vektorového pole

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\mathrm{x} & a_\mathrm{y} & a_\mathrm{z} \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial a_\mathrm{z}}{\partial y} - \frac{\partial a_\mathrm{y}}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial a_\mathrm{x}}{\partial z} - \frac{\partial a_\mathrm{z}}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_\mathrm{y}}{\partial x} - \frac{\partial a_\mathrm{x}}{\partial y}\right) \tag{9}$$

Cirkulace vektorového pole

$$\oint_l \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_l (a_\mathrm{x}\,\mathrm{d}x + a_\mathrm{y}\,\mathrm{d}y + a_\mathrm{z}\,\mathrm{d}z) \tag{10}$$

Tok vektorového pole

$$\iint_S \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{a}\,(a_\mathrm{x}\,\mathrm{d}S_\mathrm{x} + a_\mathrm{y}\,\mathrm{d}S_\mathrm{y} + a_\mathrm{z}\,\mathrm{d}S_\mathrm{z}) \tag{11}$$

Stokesova věta

$$\oint_l \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S} \tag{12}$$

Gaussova věta

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}V \tag{13}$$

2 Pole a jeho vlastnosti

Pole je jakákoliv fyzikální veličina, která nabývá různé hodnoty v různých bodech v prostoru. Příkladem *skalárního pole* je teplota, a zapisuje se $T(x, y, z)$, resp. $T(x, y, z, t)$. Příkladem *vektorového pole* je „rychlostní pole“ tekoucí kapaliny, značí se $v(x, y, z, t)$.

Pole lze popsat několika diferenciálními rovnicemi. Pro názornost lze pole zobrazit pomocí siločar, jde však o hrubé zjednodušení.

Potenciál lze zobrazit *ekvipotenciálními plochami* (hladinami). Elektrické pole je gradientem potenciálu. *Gradient* udává směr nejrychlejší změny potenciálu, a proto je kolmý na ekvipotenciální plochu (v každém bodě). V případě osamoceného náboje jsou ekvipotenciálními plochami kulové plochy se středem v náboji.

Jsou-li v jakékoliv situaci dány proudy a náboje, můžeme najít potenciály a derivovat je, čímž dostaneme vektorové pole.

Základní rozdělení polí

- Skalární a vektorové
- Homogenní a nehomogenní

- Vírové a nevírové
- Zřídlové a nezřídlové

U elektromagnetického pole lze použít dělení na:

- Pole statické – náboje jsou v klidu a proudy nulové
- Pole stacionární – náboje se pohybují konstantní rychlostí, tj. Pole stejnosměrných proudů
- Pole kvazistacionární – časově proměnné pole ve vodičích (lze zanedbat posuvné proudy, ale je třeba respektovat proudy vodivé)
- Pole kvazistatické - časově proměnné pole nízkých kmitočtů ve slabě vodivém prostředí (lze zabedbat vírové elektrické pole od proudů)

3 Maxwellovy rovnice

3.1 Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{14}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{15}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho \tag{16}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{17}$$

3.2 Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{18}$$

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \vec{j} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \tag{19}$$

$$\oiint_S \vec{D}\, d\vec{S} = \iiint_V \rho\, dV \tag{20}$$

$$\oiint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \tag{21}$$