II. STATISTICKÉ FLUKTUACE PŘI MĚŘENÍ NÁHODNÝCH IMPULSŮ.

1. Úvod:

Záření radioaktivních látek se řídí tzv. rozpadovým zákonem:

$$N = N_0 \, e^{-\lambda t} ,$$

kde N_0 je počet nerozpadlých jader v čase t = 0s, N je počet nerozpadlých jader v čase t, λ je rozpadová konstanta.

Podle tohoto zákona ubývá aktivita zářiče s časem exponenciálně. Tuto zákonitost lze dobře pozorovat u radioaktivních látek s velmi krátkým poločasem rozpadu T. U zářičů s velkým poločasem rozpadu můžeme předpokládat, že po dobu $t \ll T$ je aktivita prakticky konstantní. Jinak řešeno: Pokud budeme několikrát po sobě měřit počet rozpadů vždy za stejnou dobu, mohli bychom očekávat tytéž výsledky. Ve skutečnosti však počet rozpadů podléhá fluktuacím, které se řídí zákony pravděpodobnosti (konkrétně Poissonovým rozdělením). Výsledky tedy budou obecně různé.

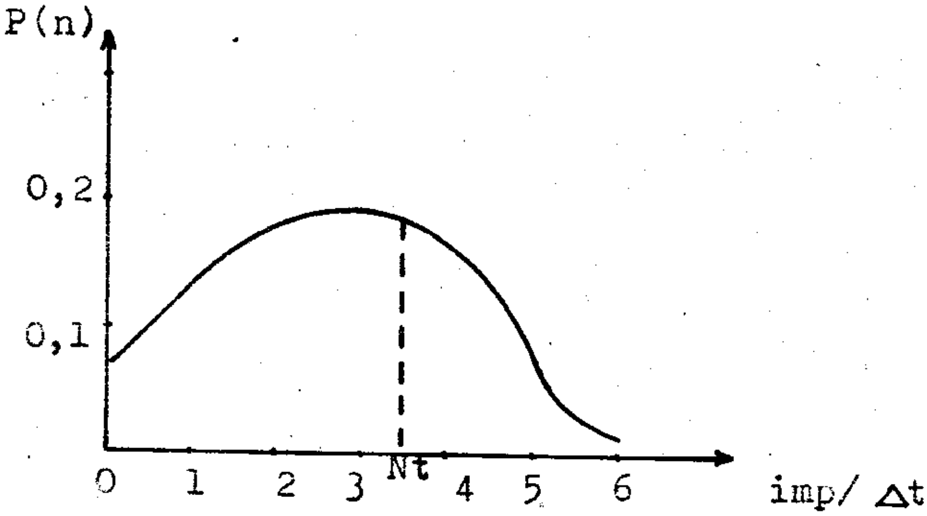
Při dostatečně početné sérii měření (nutný předpoklad k ověření statistických zákonitostí) můžeme srovnávat experimentální rozdělení s teoretickým. Získané výsledky mohou sloužit nejen k potvrzení teoretických závěrů, ale současně jsou i vhodným materiálem k testování kvalit registračního zařízení. Musíme si totiž uvědomit, že pokud odchylky mezi teorií a experimentem značně převyšují chybu měření, můžeme příčiny této skutečnosti hledat především v měřicí aparatuře.

2. Teorie:

Pravděpodobnost P(n), že naměříme n impulsů (rozpadů) za dobu t je dána Poissonovým rozdělením

$$P(n) = \frac{(Nt)^n}{n!} e^{-Nt} , \qquad (1)$$

kde N je střední počet impulsů za jednotku **času** (**aktivita**). **Na obr. 1 je znázorněno Poissonovo** rozdělení **pro** Nt = 3,5.



Obr. 1.

Rozdělení není **symetrické** vzhledem **k Nt.** Nejpravděpodobnější hodnota(odpovídá maximu křivky) je o něco menší než střední hodnota.

Rozptyl výsledků měření (disperze) je dána střední hodnotou čtverců odchylek.

$$\sigma_{\bar{n}}^{2} = \overline{(n - \bar{n})^{2}} , \qquad \bar{n} = Nt.$$

Pro Poissonovo rozdělení platí:

$$\sigma_{\bar{n}}^{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^{2} P(n) = Nt = \bar{n}.$$

Veličina

$$\sigma_{\bar{n}} = \pm \sqrt{\bar{n}}$$

se nazývá střední absolutní kvadratická odchylka (chyba) neboli standartní odchylka.

Střední kvadratická chyba jednotlivého měření počtu impulsů n je dána vztahem:

$$\sigma_{n} = \pm \sqrt{n} \qquad (2)$$

Střední kvadratická chyba četnosti impulsů N bude:

$$\sigma_N = \pm \frac{\sqrt{n}}{t} = \pm \sqrt{\frac{n}{t^2}} = \pm \sqrt{\frac{N}{t}} .$$

Chceme-li tedy snížit chybu měření četnosti a-násobně, musíme měření provádět a^2-krát déle.

Střední relativní chyba jednotlivého měření n v procentech je dána vztahem:

$$\vartheta_n = \frac{\sigma_n}{n} \cdot 100 = \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot 100 = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 100 \ (\%). \qquad (3)$$

Výsledek měření četnosti impulsů se udává ve tvaru:

$$N \pm \sigma_N .$$

Poznámka: Je-li aktivita vzorku vysoká, můžeme položit

$$n! \doteq \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$$

(Stirlingova formule).

Touto aproximací přejde Poissonovo rozdělení na tzv. Gaussovo rozdělení, které je symetrické vzhledem k Nt. Aby tedy zvláštnosti Poissonova rozdělení dobře vynikly, je nutné pracovat se zářiči o velmi nízké aktivitě. (řádově jednotky).

Měření počtu impulsů lze provést pomocí laboratorní měřicí soupravy podle schématu na obr. 2.

3. Úkol pro měření:

1) Ověřte platnost Poissonova rozdělení při měření náhodných impulsů.
2) Vyhodnocení teoretických a experimentálních výsledků využijte k posouzení kvalit registračního zařízení.

7. Zpracování výsledků měření

Vzhledem k tomu, že počet částic vyzářených zdrojem radioaktivního záření se řídí Poissonovým rozdělením, musí se Poissonovým rozdělením řídit i počet částic registrovaných GM-trubicí. Toto rozdělení je plně určeno svou střední hodnotou μ. Problémem je, jak tuto střední hodnotu určit. Obvykle se postupuje tak, že se provedeme sérii n měření a naměříme počty pulzů x_i .... x_n. Mluvíme o tzv. náhodném výběru. Z těchto hodnot spočítáme aritmetický průměr $\bar{x}$. Aritmetický průměr pokládáme za nejvhodnější statistický odhad střední hodnoty. Dále určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru δ, která udává chybu, z jakou je střední hodnota určena.

$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\delta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{\sqrt{n(n-1)}}$. Výsledek měření potom uvedeme ve tvaru $x = (\bar{x} \pm \delta)$.

Uvedený vztah platí s dostatečnou přesností, je-li počet měření větší jak 10.
Je-li počet registrovaných pulsů dostatečně velký , tak se často postupuje tak, že se naměří počet pulzů jen jednou a chyba měření se určí jako odmocninu z počtu naměřených pulzů. Vychází se z toho, že za odhad střední hodnoty vezmeme naměřenou hodnotu a rozptyl u Poissonova rozdělení je roven odmocnině ze střední hodnoty.
Například registrujeme-li 22500 pulzů za 100 s, pak výsledek měření uvedeme ve tvaru:

$x = (22510 \pm 150)$ za 100 s. Relativní chyba měření $\delta_r = \dfrac{150}{22510} 100 = 0.7\%$.

Pokud bychom potřebovali přesnost zvýšit je možné buď měření několikrát opakovat a nebo zvětšit čas, po který pulzy počítáme.
V praxi je situace ještě o něco složitější, protože měření ovlivněno i chybou, s jakou jsme schopni pulzy počítat. Tato chyba bývá u většiny čítačů pulzů rovna 1 pulzu. Z toho důvodu je nutno volit dobu počítání pulzů dostatečně velkou, aby tato chyba zbytečně nezkreslovala měření.